

# FHZ

## Espelhos e lentes esféricas em TikZ – Português

### tikz-mirror-lens package

<https://www.ctan.org/pkg/tikZ-mirror-lens>

Brasil – 27 de dezembro de 2022 – Versão: 1.0.1

#### Resumo

Esta é a documentação do pacote `tikz-mirror-lens`. Este pacote permite o desenho automático da imagem de objetos em espelhos e lentes esféricas a partir dos dados do foco, da posição do objeto e de sua altura, calculando a posição e a altura da imagem, e apresentando os raios notáveis.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Início rápido, definições e comandos</b>	<b>1</b>	<b>3.2</b>	Configurações prontas de lentes . . .	7
<b>2</b>	<b>Modelo de espelho esférico de Gauss</b>	<b>2</b>	<b>3.3</b>	Configurações prontas de lentes – à esquerda . . . . .	7
2.1	Modelagem . . . . .	2	<b>3.4</b>	Comandos constituintes . . . . .	7
2.2	Configurações prontas de espelhos . . . . .	2	<b>3.5</b>	Exemplos de cada caso possível das lentes . . . . .	8
2.3	Comandos constituintes . . . . .	3	3.5.1	Convergente . . . . .	8
2.4	Exemplos de cada caso possível dos espelhos . . . . .	4	3.5.2	Divergente . . . . .	9
2.4.1	Côncavo . . . . .	4	<b>3.6</b>	Equivalência entre comandos para lentes com objeto à direita e à esquerda . . . . .	9
2.4.2	Convexo . . . . .	4	<b>3.7</b>	Animação . . . . .	10
2.5	Animação . . . . .	4	3.7.1	Convergente . . . . .	10
2.5.1	Côncavo . . . . .	4	3.7.2	Divergente . . . . .	11
2.5.2	Convexo . . . . .	5	<b>4</b>	<b>Outros pacotes interessantes</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Modelo de lente esférica de Gauss</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>Histórico e versões</b>	<b>11</b>
3.1	Modelagem . . . . .	6			
3.1.1	Objeto à direita . . . . .	7			
3.1.2	Objeto à esquerda . . . . .	7			

## 1 Início rápido, definições e comandos

As variáveis utilizadas são:

- `f`: foco do espelho ou da lente;
- `p`: posição do objeto ao longo do eixo  $x$ ;
- `pp`: posição da imagem ao longo do eixo  $x$ ;
- `o`: altura do objeto;
- `i`: altura da imagem;
- `epsilon`: distância absoluta entre  $p$  and  $f$ ;
- `yM`: altura do espelho;
- `xL`: extensão do eixo  $x$  à esquerda;

- **xR**: extensão do eixo  $x$  à direita;
- **(xC,yC)**: Coordenadas da localização dos dados apresentados;
- **setas**: argumento opcional para alterar a densidade de setas.

Os principais comandos que criam os diagramas do espelho ou da lente a partir do foco  $f$ , da posição  $p$  e da altura  $o$  do objeto, além de outros parâmetros de ajustes, são:

- Espelhos
  - `\mirrorSphGauss[setas]{f}{p}{o}{epsilon};`
  - `\mirrorSphGaussCoord[setas]{f}{p}{o}{epsilon};`
  - `\mirrorSphGaussFixed[setas]{f}{p}{o}{epsilon}{yM}{xL}{xR};`
  - `\mirrorSphGaussFixedCoord[setas]{f}{p}{o}{epsilon}{yM}{xL}{xR}{(xC,yC)};`
- Lentes
  - `\lensSphGauss[setas]{f}{p}{o}{epsilon};`
  - `\lensSphGaussCoord[setas]{f}{p}{o}{epsilon};`
  - `\lensSphGaussFixed[setas]{f}{p}{o}{epsilon}{yM}{xL}{xR};`
  - `\lensSphGaussFixedCoord[setas]{f}{p}{o}{epsilon}{yM}{xL}{xR}{(xC,yC)};`
- Lentes com objeto à esquerda
  - Para cada lente do bloco anterior, troque “Gauss” por “GaussL”.

## 2 Modelo de espelho esférico de Gauss

### 2.1 Modelagem

As equações da posição  $p'$  e da altura  $i$  da imagem a partir do foco  $f$  do espelho e da posição  $p$  e altura  $o$  do objeto são:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = \frac{fp}{p-f}, \quad p \neq f, \quad (1)$$

$$i = -\frac{p'}{p}o.$$

As definições do tipo de espelho são feitas com base no sinal do foco:

$$\begin{aligned} f > 0 &: \text{côncavo,} \\ f < 0 &: \text{convexo.} \end{aligned} \quad (2)$$

A **Figura 1** apresenta a definição do sistema de coordenadas do espelho, na qual  $p > 0$  é a posição do objeto ao longo do eixo  $x$  e  $p' < 0$  é a posição da imagem ao longo do eixo  $x$ . O vértice  $V$  do espelho é a origem do sistemas de coordenadas.

### 2.2 Configurações prontas de espelhos

A **Tabela 1** apresenta todas as configurações de espelhos prontas fornecidas pelo pacote. A notação é:

- **seta**: distância entre setas desenhadas, em caso de omissão, o padrão é 60 (pt).
- **epsilon**: distância entre objeto e o foco na qual a imagem não é calculada nem desenhada por ser muito grande e/ou estar muito longe do vértice;
- **yM**: altura do espelho, seja um dado ou um cálculo;
- **xL**: limite negativo do eixo  $x$ ;
- **xR**: limite positivo do eixo  $x$ ;
- **Co**: o par ordenado  $(x_C, y_C)$  do bloco de equações que apresentam o foco e as coordenadas do objeto e da imagem.

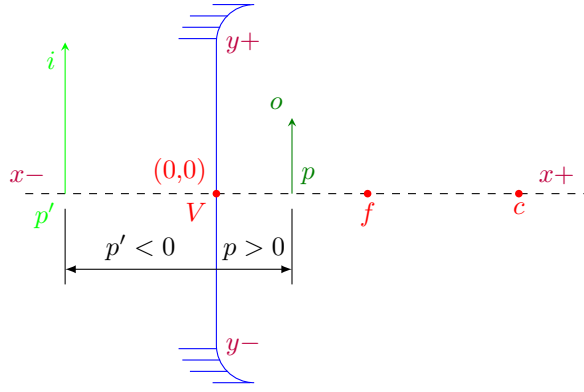


Figura 1: Convenção de sinais para espelhos esféricos.

Tabela 1: Todas as configurações de espelhos prontas.

		coord	
		No	Yes
fixed mirror size	No	 $\backslash\text{mirrorSphGauss}[\text{seta}]{f}{p}{o}{\epsilon}$	 $f = -2.0$ $(p, o) = (3.5, 2)$ $(p', i) = (-1.27277, 0.7273)$ $\backslash\text{mirrorSphGaussCoord}[\text{seta}]{f}{p}{o}{\epsilon}$
	Yes	 $\backslash\text{mirrorSphGaussFixed}[\text{seta}]{f}{p}{o}{\epsilon}{yM}{xL}{xR}$	 $f = 2$ $(p, o) = (3.5, 2)$ $(p', i) = (4.6667, -2.66669)$ $\backslash\text{mirrorSphGaussFixedCoord}[\text{seta}]{f}{p}{o}{\epsilon}{yM}{xL}{xR}{Co}$

## 2.3 Comandos constituintes

O comando que calcula a posição  $p'$  e a altura  $i$  da imagem é:

- $\backslash\text{mirrorMath}{f}{p}{o}{\epsilon}{yM}$ .

Os seguintes comandos desenharam as principais componentes do diagrama,

- desenho do espelho:  $\backslash\text{mirrorBase}{f}{yM}{xL}{xR}$ ;
- desenho dos pontos notáveis:  $\backslash\text{mirrorPts}{v}{f}{c}$ ;
- desenho dos raios notáveis:  $\backslash\text{mirrorRays}[\text{setas}]{p}{pp}{o}{i}$ .

Os seguintes comandos são os mesmos para os espelhos e para as lentes, e são responsáveis por,

- desenho do objeto e da imagem:  $\backslash\text{mirrorLensObjIma}{p}{pp}{o}{i}$ ;
- descrição dos valores numéricos das coordenadas:  $\backslash\text{mirrorLensCoord}{p}{pp}{o}{i}{f}{Co}$ .

## 2.4 Exemplos de cada caso possível dos espelhos

### 2.4.1 Côncavo

As figuras de 2 a 6 apresentam os 5 casos possíveis de posicionamento de um objeto diante de um espelho côncavo.

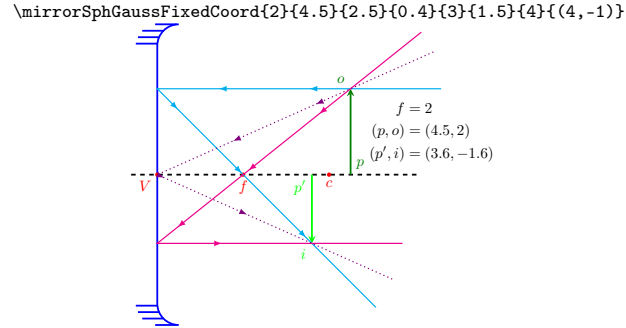


Figura 2: Caso 1, objeto longe do espelho, além do centro de curvatura.

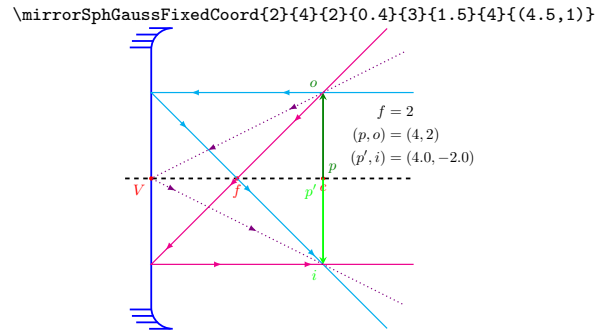


Figura 3: Caso 2, objeto localizado sobre o centro de curvatura.

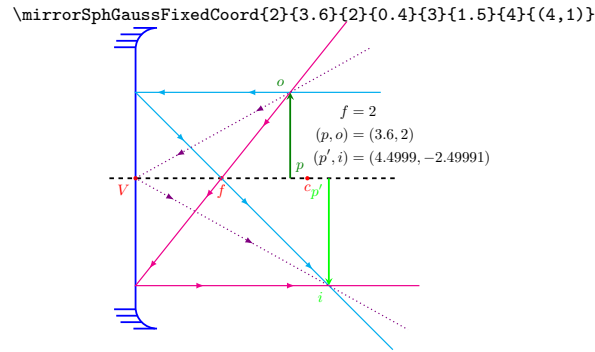


Figura 4: Caso 3, objeto localizado entre o centro de curvatura e o foco do espelho.

### 2.4.2 Convexo

A Figura 7 apresenta duas posições distintas do único caso de posicionamento de um objeto diante de um espelho convexo.

## 2.5 Animação

### 2.5.1 Côncavo

A Figura 8 apresenta uma animação contendo o movimento de um objeto próximo de um espelho côncavo.

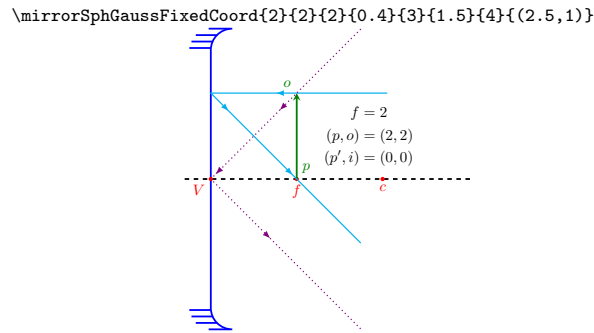


Figura 5: Caso 4, objeto localizado sobre o foco do espelho (ou a menos de uma distância  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

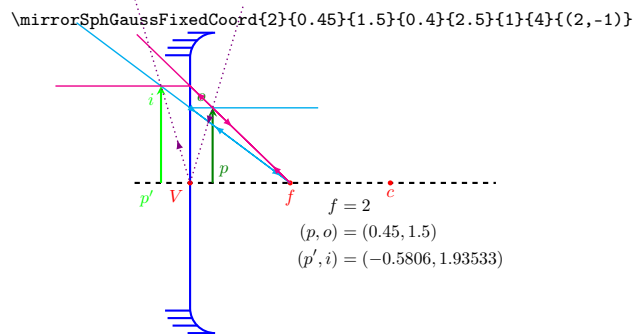
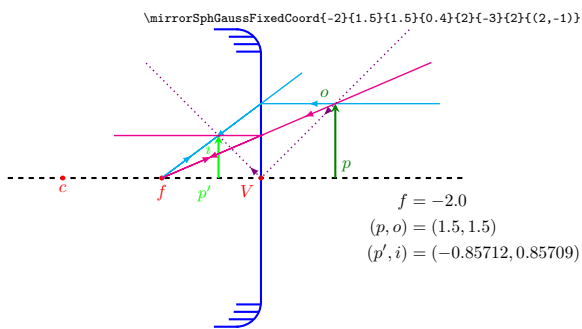
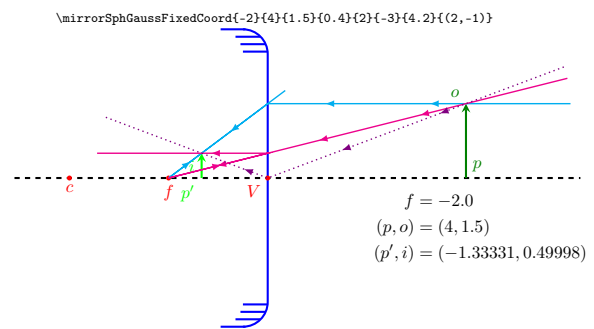


Figura 6: Caso 5, objeto localizado entre o foco e o vértice do espelho.



(a) Objeto próximo do vértice.



(b) Objeto distante do vértice.

Figura 7: Caso único, objeto localizado à frente do espelho, a qualquer distância dele.

### 2.5.2 Convexo

A **Figura 9** apresenta uma animação contendo o movimento de um objeto próximo de um espelho convexo.

Figura 8: Animação de objeto se aproximando de um espelho côncavo.

Figura 9: Animação de objeto se aproximando de um espelho convexo.

### 3 Modelo de lente esférica de Gauss

#### 3.1 Modelagem

A Figura 10 apresenta a definição do sistema de coordenadas da lente em dois casos, o com o objeto do lado positivo na Figura 10a e com o objeto do lado negativo Figura 10b.

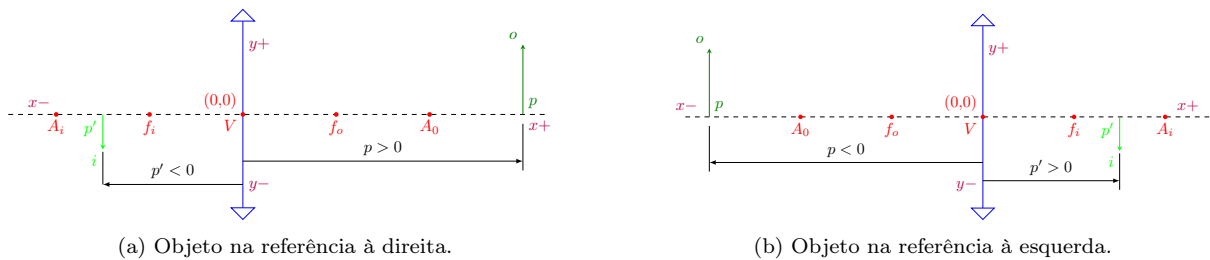


Figura 10: Convenção de sinais para lentes esféricas.

As definições do tipo de lente são feitas com base no sinal do foco:

$$\begin{aligned}
 f > 0 &: \text{ convergente,} \\
 f < 0 &: \text{ divergente.}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

### 3.1.1 Objeto à direita

Para o objeto à direita, a forma mais fácil de corrigir o modelo de um espelho esférico para uma lente esférica é com troca do sinal de  $p'$ .

As equações da posição  $p'$  e da altura  $i$  da imagem a partir do foco  $f$  do espelho, e da posição  $p$  e altura  $o$  do objeto são:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = \frac{fp}{f-p}, \quad p \neq f, \quad (4)$$

$$i = \frac{p'}{p} o.$$

### 3.1.2 Objeto à esquerda

Para o objeto à esquerda, a expressão de  $p'$  e  $i$  são dadas por:

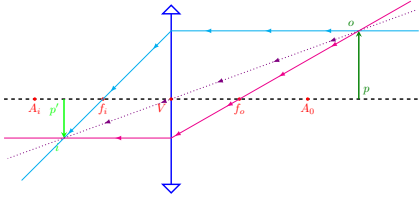
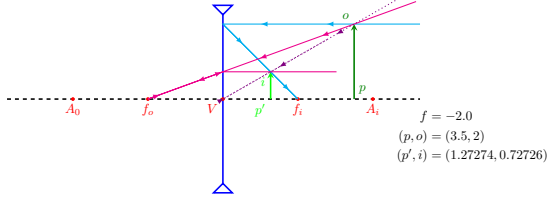
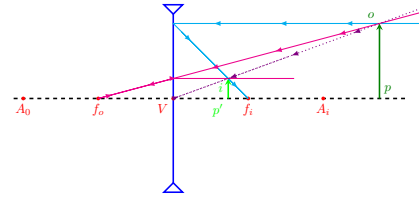
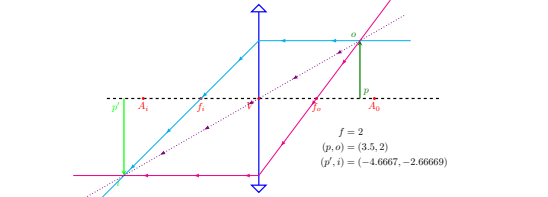
$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{f} \Rightarrow p' = \frac{fp}{f+p}, \quad p \neq -f, \quad (5)$$

$$i = \frac{p'}{p} o.$$

## 3.2 Configurações prontas de lentes

A [Tabela 2](#) apresenta todas as configurações de lentes prontas fornecidas pelo pacote.

Tabela 2: Todas as configurações de lentes prontas.

		coord	
		No	Yes
fixed mirror size	No		
	Yes		

## 3.3 Configurações prontas de lentes – à esquerda

A [Tabela 3](#) apresenta todas as configurações de lentes prontas fornecidas pelo pacote.

## 3.4 Comandos constituintes

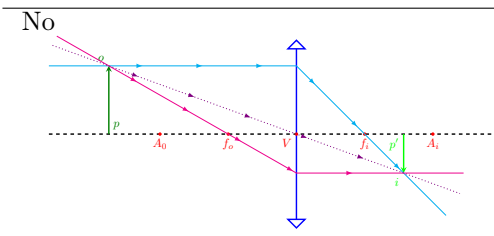
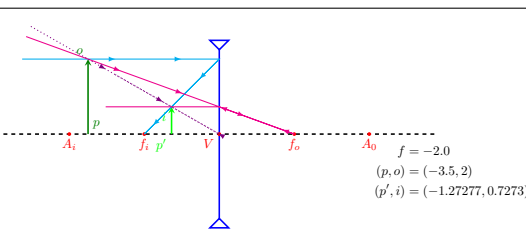
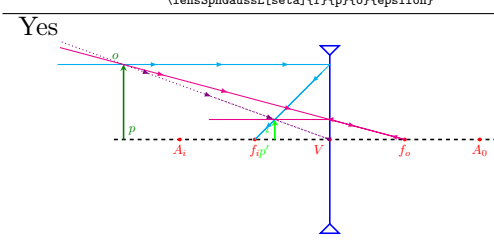
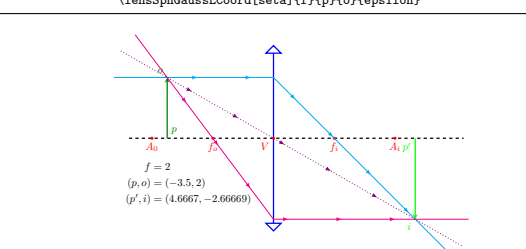
O comando que calcula a posição  $p'$  e a altura  $i$  da imagem com objeto à direita é:

- `\lensMath{f}{p}{o}{epsilon}{yM}`.

Por sua vez, o comando que calcula as coordenadas da imagem com o objeto à esquerda é:

- `\lensMathL{f}{p}{o}{epsilon}{yM}`,

Tabela 3: Todas as configurações de lentes prontas com objeto à esquerda.

		coord	
fixed mirror size	No	Yes	
			$f = -2.0$ $(p, o) = (-3.5, 2)$ $(p', i) = (-1.27277, 0.7273)$
	$\backslash\text{lensSphGaussL}\{\text{seta}\}\{f\}\{p\}\{o\}\{\epsilon\}$	$\backslash\text{lensSphGaussLCoord}\{\text{seta}\}\{f\}\{p\}\{o\}\{\epsilon\}$	
	Yes		
	$\backslash\text{lensSphGaussLFixed}\{\text{seta}\}\{f\}\{p\}\{o\}\{\epsilon\}\{yM\}\{xL\}\{xR\}$	$\backslash\text{lensSphGaussLFixedCoord}\{\text{seta}\}\{f\}\{p\}\{o\}\{\epsilon\}\{yM\}\{xL\}\{xR\}\{Co\}$	

por sua vez, a alteração na nomenclatura dos comandos que desenha as lentes é apenas a adição da letra  $L$  após a palavra “Gauss”.

Os seguintes comandos desenharam as principais componentes do diagrama,

- desenho da lente:  $\backslash\text{lensBase}\{f\}\{yM\}\{xL\}\{xR\}$ ;
- desenho dos pontos notáveis:  $\backslash\text{lensPts}\{v\}\{f\}\{a\}$ ;
- desenho dos raios notáveis:  $\backslash\text{lensRays}\{\text{seta}\}\{p\}\{pp\}\{o\}\{i\}$ .

### 3.5 Exemplos de cada caso possível das lentes

#### 3.5.1 Convergente

As figuras de 11 a 15 apresentam os 5 casos possíveis de posicionamento de um objeto diante de uma lente convergente.

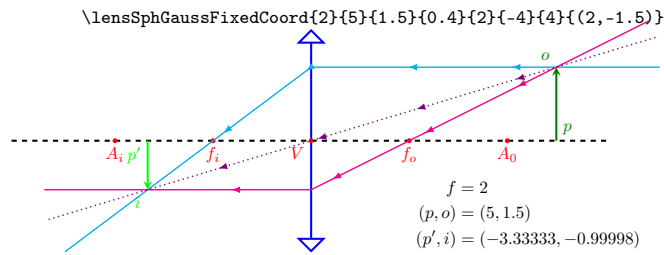


Figura 11: Caso 1, objeto longe do espelho, além do centro de curvatura.

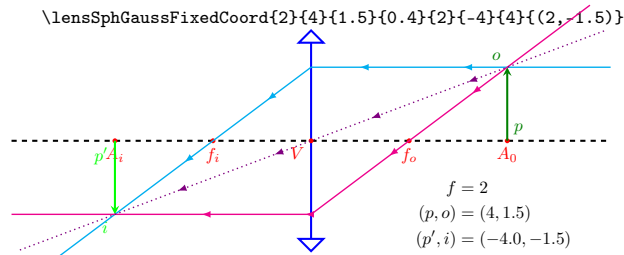


Figura 12: Caso 2, objeto sobre o antiprincipal objeto.



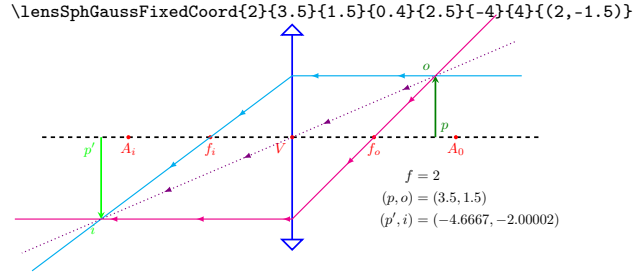


Figura 13: Caso 3, objeto entre o antiprincipal objeto e o foco objeto.

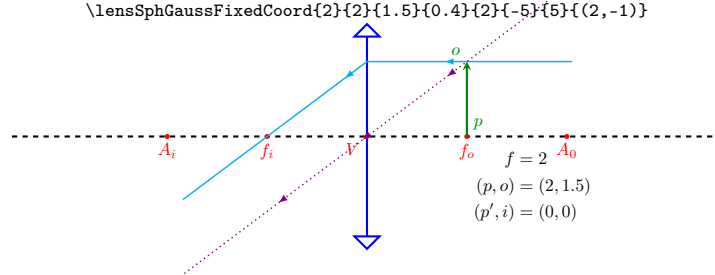
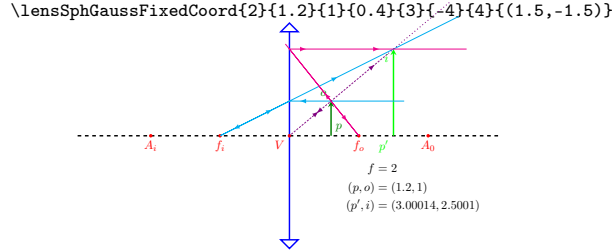
Figura 14: Caso 4, objeto sobre o foco objeto (ou a menos de uma distância  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Figura 15: Caso 5, objeto entre o foco objeto e o centro óptico da lente.

### 3.5.2 Divergente

A Figura 16 apresenta duas posições distintas do único caso de posicionamento de um objeto diante de uma lente divergente.

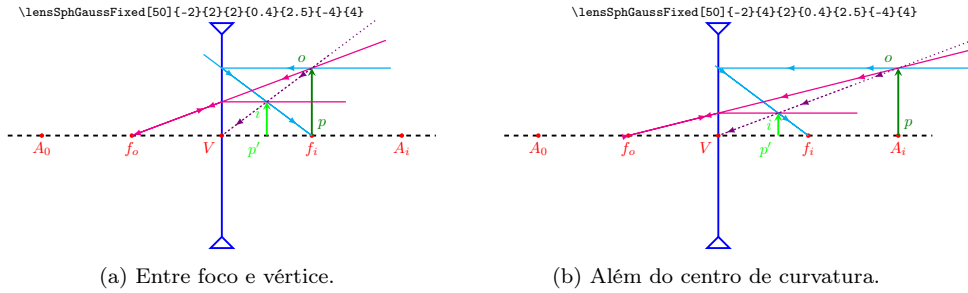


Figura 16: Caso único, objeto localizado à frente da lente, a qualquer distância dele.

## 3.6 Equivalência entre comandos para lentes com objeto à direita e à esquerda

A Figura 17 apresenta a equivalência entre os comandos que calculam e desenhando a imagem por meio do uso lentes convergentes em função da localização do objeto.

A Figura 18 apresenta a equivalência entre os comandos que calculam e desenhando a imagem por meio do uso lentes divergentes em função da localização do objeto.

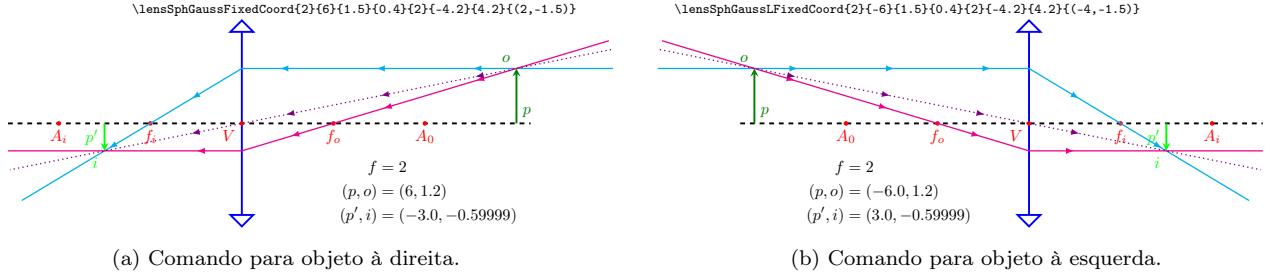


Figura 17: Equivalência entre comandos para lentes convergentes.

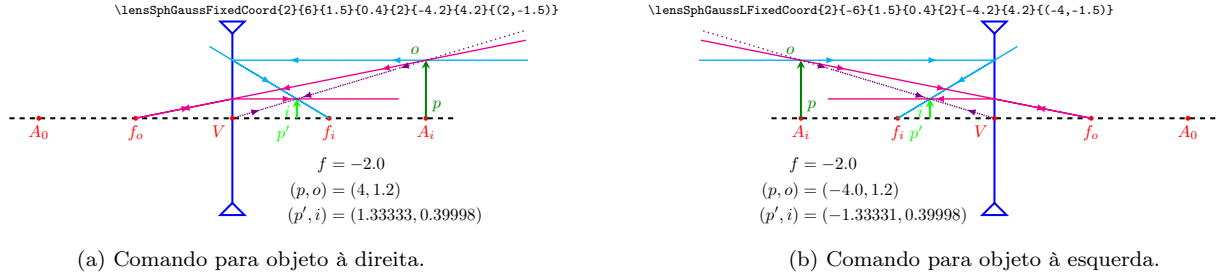


Figura 18: Equivalência entre comandos para lentes divergentes.

## 3.7 Animação

### 3.7.1 Convergente

A **Figura 19** apresenta uma animação contendo o movimento de um objeto próximo de uma lente convergente.

Figura 19: Animação de objeto se aproximando de uma lente convergente.

### 3.7.2 Divergente

A [Figura 20](#) apresenta uma animação contendo o movimento de um objeto próximo de uma lente divergente.

Figura 20: Animação de objeto se aproximando de uma lente divergente.

## 4 Outros pacotes interessantes

A seguir, encontram-se *links* interessantes para outros pacotes com implementações de ótica, e também fontes para as equações e modelagens utilizadas.

1. [TeX StackExchange](#) – TikZ library for optics?
2. [TeX StackExchange](#) – Geometrical optics
3. [CTAN](#) – tikz-optics
4. [CTAN](#) – pst-mirror
5. [CTAN](#) – simpleoptics
6. [YouTube](#) – The Organic Chemistry Tutor – Spherical Mirrors & The Mirror Equation - Geometric Optics
7. [hyperphysics](#) – Spherical Mirror Equation
8. [hyperphysics](#) – lenseq
9. [plymouth](#) – lenses
10. [khanacademy](#) – lens formula

## 5 Histórico e versões

- 1.0.0 (2022-12-24): Criação do pacote.
- 1.0.1 (2022-12-27): Pequenas correção na entrada dos argumentos das funções em `\mirrorRays` e em `\lensRays`.